Aufgabe 1

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$

1.1 Nullstellen

$f(x) = 0$

$\frac{1}{3}x^3 - x^2 = 0$

$x^2\left(\frac{1}{3}x - 1\right) = 0$

Da beide Terme x^2 enthalten, können wir x^2 ausklammern

$x^2 = 0 \quad |\sqrt{\ }$ oder $\frac{1}{3}x - 1 = 0 \quad |+1$

$x_1 = 0 \qquad \frac{1}{3}x = 1 \quad |:\left(\frac{1}{3}\right)$

$x_2 = 3$

Die Nullstellen lauten $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$.

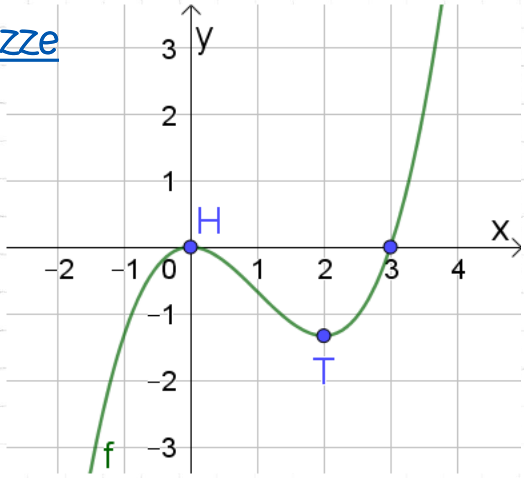
1.2 Ableitungen

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$

$f'(x) = \frac{3}{3}x^2 - 2x = x^2 - 2x$

$f''(x) = 2x - 2$

1.4 Skizze



1.3 Extrempunkte

$f'(x) = 0$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

Da beide Terme ein x enthalten, können wir x ausklammern

$x_1 = 0$ oder $x - 2 = 0 \quad |+2$

$x_2 = 2$

Einsetzen von $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ in $f''(x)$, um zu prüfen ob Hoch- oder Tief- oder Sattelpunkt:

$f''(x) = 2x - 2$

$f''(0) = 2 \cdot 0 - 2 = 0 - 2 = -2 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $x = 0$

$f''(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 4 - 2 = 2 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle $x = 2$

Einsetzen von $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ in $f(x)$, um y-Werte zu berechnen:

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$

$f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 0^2 = 0$

$f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 2^2 = -\frac{4}{3}$

Die Extrempunkte lauten: $H(0|0)$, $T(2|-\frac{4}{3})$.

Aufgabe 2

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ dritten Grades

$\boxed{\text{2× Ableiten da Infos zu Extrem- u. Wendepkt}}$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $\quad$ $f''(x) = 6ax + 2b$

in (1|6) Extrempunkt
$$\begin{cases} f(1) = 6 & \Leftrightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 6 \Leftrightarrow a + b + c + d = 6 \quad \text{I} \\ f'(1) = 0 & \Leftrightarrow 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0 \Leftrightarrow 3a + 2b + c = 0 \quad \text{II} \end{cases}$$

in (0|4) Wendepunkt
$$\begin{cases} f(0) = 4 & \Leftrightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 4 \Leftrightarrow \underline{\underline{d = 4}} \\ f''(0) = 0 & \Leftrightarrow 6a \cdot 0 + 2b = 0 \Leftrightarrow 2b = 0 \mid :2 \\ & \underline{\underline{b = 0}} \end{cases}$$

I $\quad a + \overset{b}{0} + c + \overset{d}{4} = 6 \quad \mid -4$
$\quad a + c = 2$

II $\quad 3a + 2 \cdot \overset{b}{0} + c = 0$
$\quad 3a + c = 0$

$\boxed{\text{Einsetzen von } d=4 \text{ und } b=0 \text{ in die Gleichungen I und II und Vereinfachen.}}$

I $\quad a + c = 2$
II $\quad 3a + c = 0 \quad] \ominus$

I−II $\quad -2a = 2 \quad \mid :(-2)$
$\quad \underline{\underline{a = -1}}$

$\boxed{\text{Lösen des Gleichungssystems aus den Gleichungen I und II}}$

Einsetzen von $a = -1$ in z.B. I:
$\overset{a}{-1} + c = 2 \quad \mid +1$
$\underline{\underline{c = 3}}$

$\boxed{\text{Bestimmen von } c \text{ durch Rückeinsetzen von } a}$

Die Funktionsgleichung lautet: $f(x) = \overset{a}{-1}x^3 + \overset{b}{0}x^2 + \overset{c}{3}x + \overset{d}{4}$

$\underline{\underline{f(x) = -x^3 + 3x + 4}}$

Aufgabe 3

3.1 a) $\sin(x) = -0{,}5 \quad \mid \arcsin$
$x = \arcsin(-0{,}5)$
$\underline{x \approx -0{,}524}$

b) $2 \cdot \cos(x) = 0{,}75 \quad \mid :2$
$\cos(x) = 0{,}375 \quad \mid \arccos$
$x = \arccos(0{,}375)$
$\underline{x \approx 1{,}186}$

3.2 $\quad h(x) = 5 \cdot \sin(3x^2 + 2)$
$h'(x) = 5 \cdot \cos(3x^2 + 2) \cdot 6x$
$= \underline{30x \cdot \cos(3x^2 + 2)}$

Aufgabe 4

4.1 $g'(x) = 2 \cdot 3^x \cdot \ln(3)$ $\quad h'(x) = 4 \cdot 12^x \cdot \ln(12)$

4.2 $g'(1) = 2 \cdot 3^1 \cdot \ln(3) \approx 6{,}59$

4.3

$$g(x) = h(x)$$

$$2 \cdot 3^x = 4 \cdot 12^x \quad |:2$$

$$3^x = 2 \cdot 12^x \quad |:12^x$$

$$\frac{3^x}{12^x} = 2$$

$$\left(\frac{3}{12}\right)^x = 2$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 2 \quad |\log_{\frac{1}{4}}$$

$$x = \log_{\frac{1}{4}}(2)$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot 3^{-\frac{1}{2}} \approx 1{,}15 \qquad S\left(-\frac{1}{2} \,\middle|\, 1{,}15\right)$$